

Examen de mathématique - I2

(Les dérivées)

1) Démontrer : Si f est une fonction dérivable en x_0 et g une fonction dérivable en $f(x_0)$, alors la fonction $(g \circ f)$ est dérivable en x_0 et on a $(g \circ f)'(x_0) = g'[f(x_0)] \cdot f'(x_0)$.

2) Calculer à l'aide de la **définition** du nombre dérivé (comme limite) le nombre dérivé $f'(x_0)$

$$\text{si } f(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2 - 1}$$

3) Calculer une équation de la tangente au point A d'abscisse 4 du graphe de la fonction f

$$\text{définie par } f(x) = \frac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}}$$

4) Calculer $f'(x)$ si :

$$1) f(x) = (3 - 2 \sin(x^3))^5$$

$$3) f(x) = \sqrt{\frac{4x - 3}{x + 2}}$$

$$2) f(x) = \frac{3 \sin(x) - 2 \cos(x)}{5}$$

$$4) f(x) = (6x - 1)^4 (x + 3)^3$$

Remarque : les calculatrices et les formulaires/tables ne sont pas autorisées.

Exercice 1

Rappel: soit 2 fonctions f et g et leur D_f, D_g :

$$\text{alors: } f \circ g : \left\{ \begin{array}{l} x \in \mathbb{R} \\ x \in D_g \text{ et } g(x) \in D_f \end{array} \right\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto (f \circ g)(x)$$

$$\text{où } (f \circ g)(x) =: f[g(x)]$$

exemples: $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = \cos(x)$

$$\text{alors } (f \circ g)(x) =: f[g(x)] = f[\cos(x)] = \sqrt{\cos(x)}$$

$$\text{et } (g \circ f)(x) =: g[f(x)] = g[\sqrt{x}] = \cos(\sqrt{x})$$

remarque: la composition des applications n'est pas commutative.

Théorème 3: (H) f dérivable en x_0 et $x_0 \in D_f$
 et g dérivable en $f(x_0)$ et $f(x_0) \in D_g$
 (T) $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$

(D) soit: $(g \circ f)'(x_0) =: \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(x_0)}{x - x_0}$

$$=: \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{f(x) - f(x_0)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$= \lim_{\substack{y \rightarrow f(x_0) \\ y = f(x)}} \frac{g(y) - g(f(x_0))}{y - f(x_0)} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

et $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

car f est continue en x_0
 par (H) et thm 1

(H)
 $= g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$

Q.E.D.

$$(H) \begin{cases} f'(x_0) =: \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \mathbb{R} \\ \text{et} \\ g'(f(x_0)) =: \lim_{y \rightarrow f(x_0)} \frac{g(y) - g(f(x_0))}{y - f(x_0)} \in \mathbb{R} \end{cases}$$

2) Soit $f(x) = \frac{x^3+1}{x^2-1}$ et $D_f = \mathbb{R} - \{-1; +1\}$

(2)

soit $x_0 \in D_f$

alors $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{x^3+1}{x^2-1} - \frac{x_0^3+1}{x_0^2-1}}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x^3+1)(x_0^2-1) - (x_0^3+1)(x^2-1)}{(x-x_0)(x^2-1)(x_0^2-1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^3x_0^2 - x^3 + x_0^2 - 1 - x_0^3x^2 + x_0^3 - x^2 + 1}{(x-x_0)(x^2-1)(x_0^2-1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x^3x_0^2 - x_0^3x^2) - (x^3 - x_0^3) - (x^2 - x_0^2)}{(x-x_0)(x^2-1)(x_0^2-1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2x_0^2(x-x_0) - (x-x_0)(x^2+xx_0+x_0^2) - (x-x_0)(x+x_0)}{(x-x_0)(x^2-1)(x_0^2-1)}$$

$$= \frac{x_0^4 - 3x_0^2 - 2x_0}{(x_0^2-1)^2} = \frac{x_0(x_0^3 - 3x_0 - 2)}{(x_0-1)^2(x_0+1)^2} = \frac{x_0(x_0+1)(x_0-2)}{(x_0-1)^2(x_0+1)^2} = \frac{x_0(x_0-2)}{(x_0-1)^2}$$

Autre: $f(x) = \frac{x^3+1}{x^2-1} = \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{(x+1)(x-1)}$

d'où $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{x^2-x+1}{x-1} - \frac{x_0^2-x_0+1}{x_0-1}}{x - x_0}$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x^2-x+1)(x_0-1) - (x_0^2-x_0+1)(x-1)}{(x-x_0)(x-1)(x_0-1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2x_0 - x^2 - x x_0 + x + x_0 - 1 - x_0^2x + x_0^2 + x_0x - x_0 - x + 1}{(x-x_0)(x-1)(x_0-1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x^2x_0 - x_0^2x) - (x^2 - x_0^2)}{(x-x_0)(x-1)(x_0-1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x x_0 (\cancel{x-x_0}) - (\cancel{x-x_0})(x+x_0)}{(\cancel{x-x_0})(x-1)(x_0-1)} = \frac{x_0^2 - 2x_0}{(x_0-1)^2} = \frac{x_0(x_0-2)}{(x_0-1)^2} \quad (3)$$

vérification avec les formules de dérivation:

$$\begin{aligned} \left(\frac{x^3+1}{x^2-1} \right)' &= \left[\frac{(\cancel{x+1})(x^2-x+1)}{(\cancel{x+1})(x-1)} \right]' = \frac{(2x-1)(x-1) - (x^2-x+1) \cdot 1}{(x-1)^2} \\ &= \frac{2x^2-3x+1-x^2+x-1}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2} \end{aligned}$$

3) Données: $\left\{ \begin{array}{l} * \Gamma_f \text{ graphe de } f \text{ et } f(x) = \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} \\ * \text{soit } A(4, f(4)) \in \Gamma_f \end{array} \right.$

Résolution: Calculer une équation de la tangente t_A en A à Γ_f ; on a: $t: y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

on $x_0 = 4$ et $f(x_0) = f(4) = \frac{1+\sqrt{4}}{1-\sqrt{4}} = \frac{3}{1-2} = -3$

et $f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(1-\sqrt{x}) - (1+\sqrt{x}) \cdot \frac{-1}{2\sqrt{x}}}{(1-\sqrt{x})^2} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(1-\sqrt{x}+1+\sqrt{x})}{(1-\sqrt{x})^2}$

$= \frac{1}{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})^2}$ d'où $f'(4) = \frac{1}{\sqrt{4}(1-\sqrt{4})^2} = \frac{1}{2(-1)^2} = \frac{1}{2}$

d'où $t_A: y - (-3) = \frac{1}{2}(x-4)$

$\Leftrightarrow 2y + 6 = x - 4$

$\Leftrightarrow x - 2y - 10 = 0$

4) 1) $\left[(3 - 2 \sin(x^3))^5 \right]'$

$$= 5 (3 - 2 \sin(x^3))^4 (3 - 2 \sin(x^3))'$$

$$= 5 (3 - 2 \sin(x^3))^4 (0 - 2 \cos(x^3) \cdot 3x^2)$$

$$= -30 (3 - 2 \sin(x^3))^4 \cdot \cos(x^3) \cdot x^2$$

2) $\left(\frac{3 \sin(x) - 2 \cos(x)}{5} \right)' = \frac{1}{5} (3 \sin(x) - 2 \cos(x))'$

$$= \frac{1}{5} (3 \cos(x) + 2 \sin(x))$$

3) $\left(\sqrt{\frac{4x-3}{x+2}} \right)' = \frac{\left(\frac{4x-3}{x+2} \right)'}{2 \sqrt{\frac{4x-3}{x+2}}}$

$$= \frac{\frac{8+3}{(x+2)^2}}{2 \sqrt{\frac{4x-3}{x+2}}} = \frac{11}{2(x+2)^2 \sqrt{\frac{4x-3}{x+2}}}$$

4) $\left[(6x-1)^4 (x+3)^3 \right]' =$

$$4(6x-1)^3 \cdot 6 \cdot (x+3)^3 + (6x-1)^4 \cdot 3(x+3)^2 \cdot 1 =$$

$$(6x-1)^3 (x+3)^2 \cdot 3 [4 \cdot 2 \cdot (x+3) + (6x-1)] =$$

$$3 (6x-1)^3 (x+3)^2 (14x + 23)$$