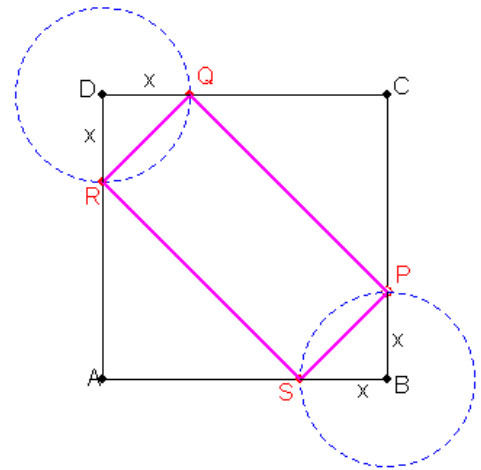


Examen de mathématique - I3

(Etude de fonction - Optimisation)

- 1) Soit la fonction f_a définie par $y = f_a(x) = \frac{x^2 + ax - 8}{x - 1}$ et $a \in \mathbb{R}$;
- calculer a si le point $P(-1,3)$ appartient au graphique Γ_a de f_a ;
 - calculer a si la tangente au point Q d'abscisse 2 de Γ_a est parallèle à la droite d d'équation $d : 2x - 3y + 1 = 0$;
 - calculer a si le graphique Γ_a n'admet pas de point à tangente horizontale ;
 - * étudier complètement la fonction f_2 définie par $y = f_2(x) = \frac{x^2 - 2x - 8}{x - 1}$;
 * démontrer que le graphique Γ_2 de f_2 admet le point $C(1 ; 0)$ comme centre de symétrie en translatant les axes de vecteur $\vec{v} = \overrightarrow{OC}$.

- 2) On dispose d'un carré ABCD, de côté a .
 A partir des sommets opposés B et D, on reporte sur chaque côté un segment de longueur x .
 On détermine ainsi un rectangle PQRS inscrit dans le carré.
- Etudier les variations de l'aire du rectangle en fonction de x .
 - Démontrer que le périmètre de ce rectangle ne dépend pas de x .



Soit $f_a(x) = \frac{x^2 + ax - 8}{x-1}$ et $a \in \mathbb{R}$ et Γ_a son graphique;

a) Calculer a si $P(-1, 3) \in \Gamma_a$:

on a $P(-1, 3) \in \Gamma_a \Leftrightarrow f_a(-1) = 3 \Leftrightarrow \frac{1-a-8}{-2} = 3 \Leftrightarrow -a-7 = -6 \Leftrightarrow a = -1$

c) Calculer a si la tangente t en Q d'abscisse 2 à Γ_a est parallèle à $d: 2x - 3y + 1 = 0$:

* on a: $Q \in \Gamma_a \Leftrightarrow Q(2, y_0)$ et $y_0 = f_a(2) = \frac{4+2a-8}{1} = 2a-4$

et la pente de la tangente t : $m = f'_a(2)$ est égale à $\frac{2}{3}$ (pente de d)

* or $f'_a(x) = \frac{(2x+a)(x-1) - (x^2+ax-8) \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{2x^2-2x+ax-a-x^2-ax+8}{(x-1)^2}$

$= \frac{x^2-2x+(8-a)}{(x-1)^2}$; donc $f'_a(2) = \frac{4-4+8-a}{1} = 8-a$

d'où $f'_a(2) = \frac{2}{3} \Leftrightarrow 8-a = \frac{2}{3} \Leftrightarrow a = 8 - \frac{2}{3} = \frac{22}{3}$

c) Calculer a si Γ_a n'admet pas de tangente horizontale:

* on a la condition voulue $\Leftrightarrow f'_a(x) = \frac{x^2-2x+(8-a)}{(x-1)^2} \neq 0, \forall x \in \mathbb{R} - \{1\}$

or $x^2-2x+(8-a) = 0$ et $x \in \emptyset$

$\Leftrightarrow \Delta' = 1 - (8-a) < 0 \Leftrightarrow -7+a < 0 \Leftrightarrow a > 7$

d) Soit $a = -2$; étude de f_{-2} : $y = f_{-2}(x) = \frac{x^2-2x-8}{(x-1)}$

* Domaine: $D = \mathbb{R} - \{1\}$ car $x-1 \neq 0$

* Parité: aucune car D non symétrique, en effet $(-1) \in D$ et $1 \notin D$;

* Asymptotes: vert: $\boxed{x=1}$ car $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{-9}{0_{\pm}} = \begin{matrix} -\infty \\ +\infty \end{matrix}$

aux infinis: par division euclidienne:

$f(x) = \frac{x^2-2x-8}{x-1} = (x-1) + \frac{-9}{x-1}$

d'où $\boxed{y=x-1}$ est as. affine si $x \rightarrow \pm \infty$

$$\begin{array}{r} x^2-2x-8 \quad | \quad x-1 \\ -x^2+x \quad \quad \quad \\ \hline 0-x-8 \\ +x-1 \\ \hline 0-9 \end{array}$$

* Dérivée première:

$f'(x) = \frac{x^2-2x+(8-a)}{(x-1)^2} \Big|_{a=-2} = \frac{x^2-2x+10}{(x-1)^2}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2-2x+10 = 0$
 $\Leftrightarrow \Delta' = 1-10 < 0$ et $x \in \emptyset$

donc $f'(x) > 0, \forall x \in D$

+ + || + + $\rightarrow \mathbb{R}$

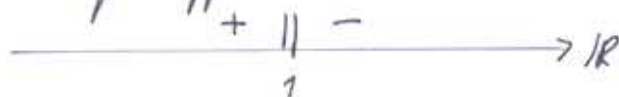
* Dérivée sec.:

$$f''(x) = \left[\frac{x^2 - 2x + 10}{(x-1)^2} \right]' = \frac{(2x-2)(x-1)^2 - (x^2 - 2x + 10) \cdot 2(x-1)}{(x-1)^4}$$

$$= \frac{2(x-1)^2 - 2(x^2 - 2x + 10)}{(x-1)^3} = \frac{2(x^2 - 2x + 1 - x^2 + 2x - 10)}{(x-1)^3}$$

$$= \frac{-18}{(x-1)^3}$$

$f''(x) \neq 0, \forall x \in D$ et $f''(x)$ est du signe opposé à $(x-1)$:



* Tableau des variations:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$			
	+		+
$f''(x)$	+		-
$f(x)$	$y=x-1$	$y=x-1$	$y=x-1$
		A.V.	
	+		-

* Démontrons que $\mathcal{I}_c(\Gamma_f) = \Gamma_f$ si $c \in]1, 0)$

soit la translation de vecteur $\vec{v} = \vec{cO} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\text{et } \begin{cases} x' = x - 1 \\ y' = y - 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' + 1 \\ y = y' \end{cases}$$

d'où remplaçons dans $y = f(x)$ pour obtenir $y' = g(x')$

$$\text{on a } \begin{cases} y = f(x) \\ x = x' + 1 \\ y = y' \end{cases} \Rightarrow y' = g(x') = \frac{(x'+1)^2 - 2(x'+1) - 8}{x'+1-1} = \frac{x'^2 + 2x' + 1 - 2x' - 2 - 8}{x'} = \frac{x'^2 - 9}{x'}$$

$$\Rightarrow y' = g(x') = \frac{x'^2 - 9}{x'}$$

et g est bien une fonction impaire car $D_g = \mathbb{R}^*$ et $g(-x') = -g(x'), \forall x' \in D_g$

$$\text{donc } \mathcal{I}_0(\Gamma_g) = \Gamma_g$$

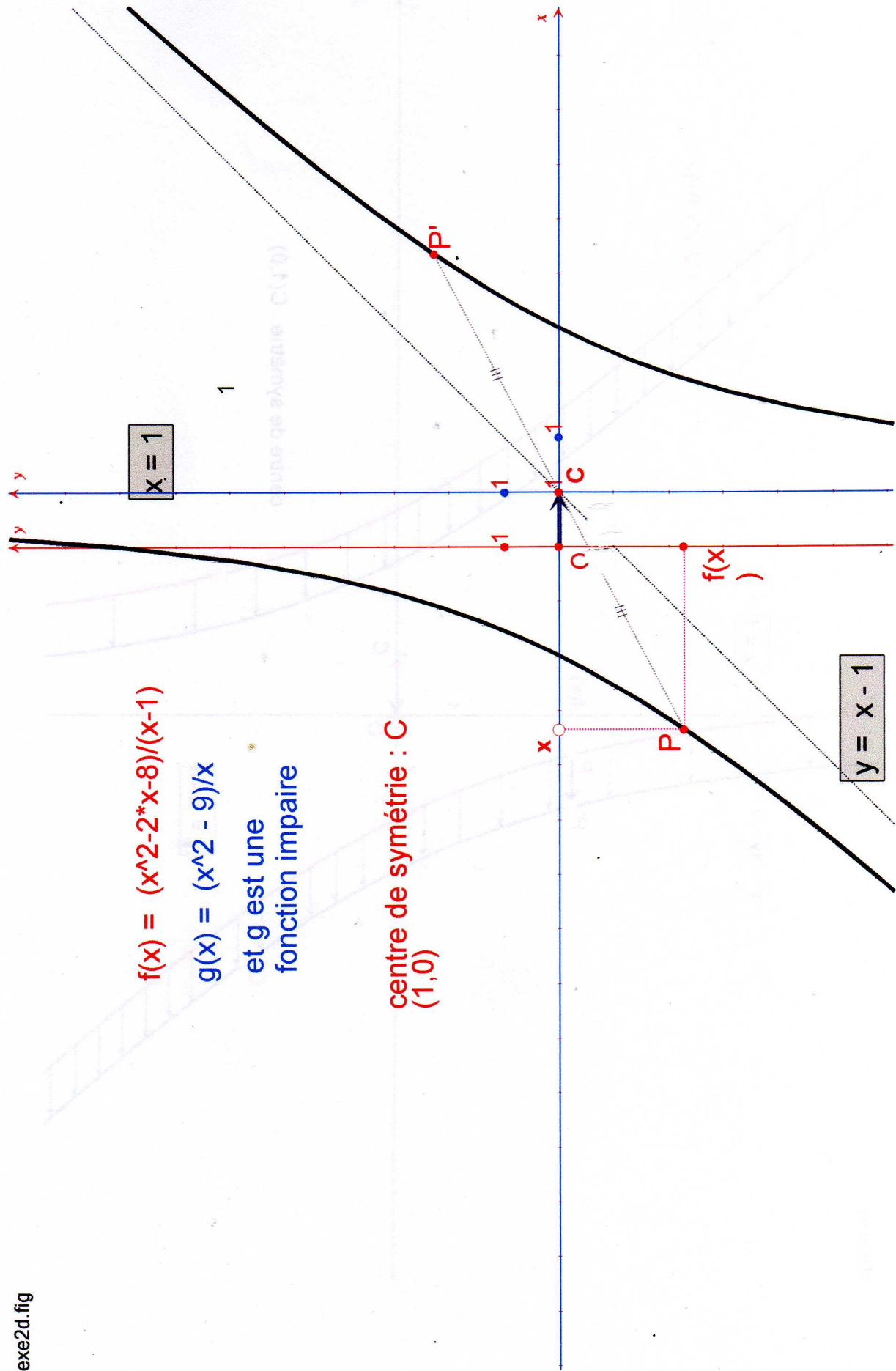
$$\text{et ainsi } \mathcal{I}_c(\Gamma_f) = \Gamma_f \quad \text{cqfd}$$

$$f(x) = (x^2 - 2x - 8)/(x - 1)$$

$$g(x) = (x^2 - 9)/x$$

et g est une
fonction impaire

centre de symétrie : C
(1,0)



Exercice 2 :

Données :

- * constante : $a \in \mathbb{R}_+^*$, côté du carré
- * variable : $x = SB = BP = DQ = DR$ et $0 \leq x \leq a$
- * fonction : aire du rectangle PQRS :
 $a = PQ \cdot QR = y \cdot z$
- * paramètres : $y = PQ = RS$
 $z = QR = SP$

Résolution : * ds le triangle rectangle PCQ : $PC^2 + CQ^2 = QP^2$ (Pythagore)
 avec $PC = CQ = a - x$

d'où $y^2 = 2(a-x)^2 \Leftrightarrow y = \sqrt{2(a-x)^2} \geq 0$
 $= \sqrt{2}(a-x) \text{ (car } a \geq x)$

* de même : ds le triangle rectangle BPS :
 $BS^2 + BP^2 = SP^2$ avec $BS = BP = x$

d'où $z^2 = 2x^2 \Leftrightarrow z = \sqrt{2}x$ car $z \geq 0$ et $x \geq 0$ et $SP = z$

Ainsi l'aire $a = y \cdot z \Rightarrow a(x) = \sqrt{2}(a-x) \cdot \sqrt{2}x = 2(-x^2 + ax)$

Etude de $a(x)$: $a'(x) = 2(-2x + a)$ et $\begin{array}{c|ccc} a'(x) & + & 0 & - \\ \hline x & 0 & \frac{a}{2} & a \end{array}$

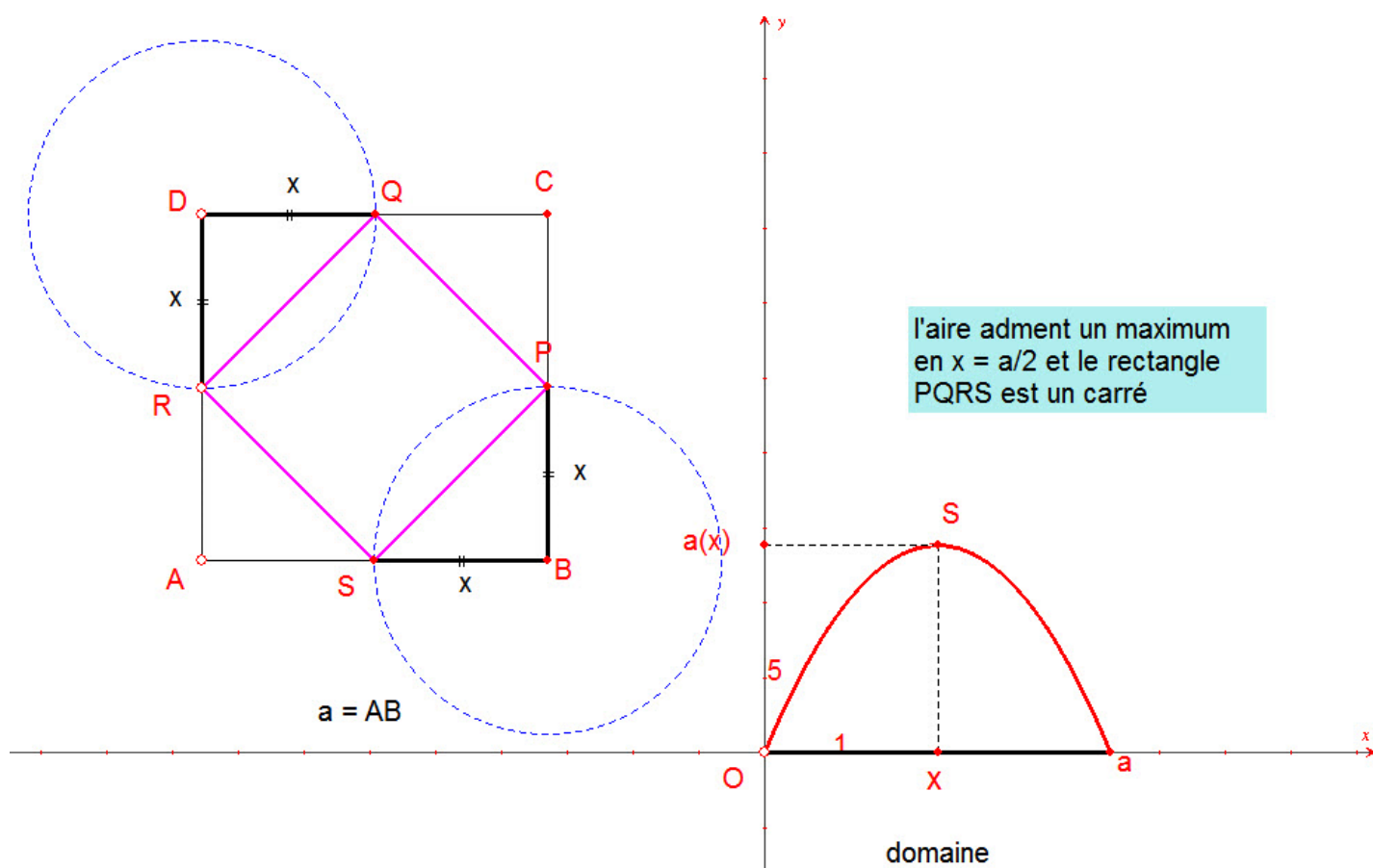
Tableau :

x	0	$\frac{a}{2}$	a
$a'(x)$	+	0	-
$a(x)$		Maximum	

Réponse : L'aire du rectangle est maximale en $x = \frac{a}{2}$ et vaut alors

$$a\left(\frac{a}{2}\right) = 2\left(-\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{2}\right) = \frac{a^2}{2},$$

soit la moitié de l'aire du carré ABCD.



Exercice 2:

pour le périmètre on a:

$$p = 2(PQ + QR) = 2 \cdot (y + z)$$

$$\text{avec } y = \sqrt{2}(a-x) \text{ et } z = \sqrt{2}x$$

$$\begin{aligned} \text{d'où } p(x) &= 2(\sqrt{2}(a-x) + \sqrt{2}x) \\ &= 2(\sqrt{2}a - \cancel{\sqrt{2}x} + \cancel{\sqrt{2}x}) \\ &= 2\sqrt{2}a \end{aligned}$$

donc le périmètre du rectangle PQRS est constant.

