Examen de mathématique – 8

(La récurrence)

***Remarques :** - les tables et formulaires sont autorisées.*
- la calculatrice n'est pas autorisée.

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, démontrer que le nombre $(3^{2n} - 1)$ est multiple de 8.

2) Démontrer la conjecture suivante :
soit $q \in \mathbb{R} - \{0\,;1\}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $1 + q^1 + q^2 + \cdots + q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q}$

3) Démontrer la conjecture suivante :
$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{2^1} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \frac{4}{2^4} + \cdots + \frac{n}{2^n} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$

4) a) Le nombre $(10^n + 1)$ est-il divisible par 9 pour certains $n \in \mathbb{N}$?
b) Démontrer pourtant que : si $(10^k + 1)$ est divisible par 9, alors $(10^{k+1} + 1)$ aussi.

5) a) Soit le nombre $s_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \frac{1}{1+2+3+4} + \cdots + \frac{1}{1+2+3+4+\cdots+n}$.
Calculer ce nombre pour les valeurs de n suivantes : $n \in \{1,2,3,4,5\}$.

b) ***Bonus : proposer une formule « directe » pour calculer s_n en fonction du nombre n.***

1) (H) $n \in \mathbb{N}^*$

(T) $(3^{2n}-1)$ multiple de 8

(D) par récurrence :

1) $n=1$: $3^2-1 = 9-1 = 8$: mult. de 8 ✓

2) $n=k \Rightarrow n=k+1$:

soit $3^{2(k+1)}-1 = 3^{2k+2}-1 = 3^{2k}\cdot 3^2 - 1$

$= 3^{2k}\cdot 9 - 1 = 3^{2k}(8+1)-1$

$$\underbrace{\underbrace{3^{2k}\cdot 8}_{\text{mult. de 8}} + \underbrace{(3^{2k}\cdot 1 - 1)}_{\text{mult. de 8 par } (H_r)}}_{\text{la somme est mult. de 8}}$$

cqfd

2) (H) $n \in \mathbb{N}^*$, $q \in \mathbb{R}-\{0;1\}$

(T) $1+q+q^2+\cdots+q^{n-1} = \dfrac{1-q^n}{1-q}$

(D) par récurrence :

1) $n=0$: $1 = \dfrac{1-q}{1-q}$ vrai

2) $n=k \Rightarrow n=k+1$:

soit : $1+q+q^2+\cdots+q^k =$) associativité

$(1+q+q^2+\cdots+q^{k-1})+q^k =$) (H_r)

$\dfrac{1-q^k}{1-q} + q^k =$) algèbre

$\dfrac{1-q^k+(1-q)q^k}{1-q} =$) algèbre

$\dfrac{1-\cancel{q^k}+\cancel{q^k}-q\cdot q^k}{1-q} =$) algèbre

$\dfrac{1-q^{k+1}}{1-q}$

cqfd

3) (H) $n \in \mathbb{N}^*$

(T) $\frac{1}{2^1} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \dots + \frac{n}{2^n} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$

(D) par récurrence :

1) $n = 1$: $\frac{1}{2^1} = 2 - \frac{1+2}{2^1} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = 2 - \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{\overbrace{4-3}^{=1}}{2}$ ✓

2) Soit :

$$\left(\frac{1}{2^1} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \dots + \frac{k}{2^k}\right) + \frac{(k+1)}{2^{(k+1)}} =$$ assoc. + (H$_r$)

$$2 - \frac{k+2}{2^k} + \frac{k+1}{2^{k+1}} =$$ algèbre

$$2 - \frac{2(k+2) - (k+1)}{2^{k+1}} =$$ algèbre

$$2 - \frac{2k+4-k-1}{2^{k+1}} =$$

$$2 - \frac{k+3}{2^{k+1}} = 2 - \frac{(k+1)+2}{2^{k+1}}$$ qfd

4) a) Soit $u_n = 10^n + 1$, $n \in \mathbb{N}$

si $n = 1$: $u_1 = 10^1 + 1 = 11$
$n = 2$: $u_2 = 10^2 + 1 = 101$
$n = 3$: $u_3 = 10^3 + 1 = 1001$
$n = 4$: $u_4 = 10^4 + 1 = 10001$
$n = 5$: $u_5 = 10^5 + 1 = 100'001$

aucun de ces nombres n'est divisible par 9 !

c) (H) $(10^k + 1)$ divisible par 9

(T) $(10^{k+1} + 1)$ div. par 9

(D) Soit $10^{k+1} + 1 = 10^k \cdot 10 + 1 = 10^k \cdot (9+1) + 1$

$$= \underbrace{\underbrace{10^k \cdot 9}_{\text{div. par } 9} + \underbrace{(10^k + 1)}_{\text{div. par 9 par (H)}}}_{\text{donc div. par 9}}$$

cqfd

5) a) Soit le nombre

$$S_n = 1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \frac{1}{1+2+3+4} + \dots + \frac{1}{1+2+3+\dots+n}$$

Si $n=1$: $S_1 = 1$

Si $n=2$: $S_2 = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$

Si $n=3$: $S_3 = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{4}{3} + \frac{1}{6} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$

Si $n=4$: $S_4 = S_3 + \frac{1}{1+2+3+4} = \frac{3}{2} + \frac{1}{10} = \frac{16}{10} = \frac{8}{5}$

Si $n=5$: $S_5 = S_4 + \frac{1}{1+2+3+4+5} = \frac{8}{5} + \frac{1}{15} = \frac{25}{15} = \frac{5}{3}$

b) $S_n = \frac{2n}{n+1}$

en effet : $S_1 = \frac{2.1}{1+1} = \frac{2}{2} = 1$

$S_2 = \frac{2.2}{2+1} = \frac{4}{3}$

$S_3 = \frac{2.3}{3+1} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

$S_4 = \frac{2.4}{4+1} = \frac{8}{5}$

$S_5 = \frac{2.5}{5+1} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$ jusque là ça marche !

Pour prouver que la formule est vraie, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, il faut procéder par récurrence.

⚠ Comment peut-on trouver la formule :

$$S_n = 1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \frac{1}{1+2+3+4} + \dots + \frac{1}{1+2+3+\dots+n}$$

$$= \frac{2n}{n+1}$$

?

écrivons : $1+2+3+4+\dots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ (formule de Gauss)

On a : $$S_n = \underbrace{\frac{1}{1} + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \dots + \frac{1}{1+2+\dots+(n-1)}}_{S_{n-1}} + \frac{1}{1+2+3+\dots+n}$$

$$\Leftrightarrow S_n = S_{n-1} + \frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}} \Leftrightarrow S_n = S_{n-1} + \frac{2}{n(n+1)}$$

d'où :

$$S_n = S_{n-1} + \frac{2}{n(n+1)} \qquad \text{pour } n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$$

$$S_{n-1} = S_{n-2} + \frac{2}{(n-1)\cdot n}$$

$$S_{n-2} = S_{n-3} + \frac{2}{(n-2)\cdot(n-1)}$$

$$\vdots$$

$$S_3 = S_2 + \frac{2}{3\cdot 4}$$

$$S_2 = S_1 + \frac{2}{2\cdot 3}$$

$$S_1 = \frac{1}{1} = \frac{2}{1\cdot 2}$$

$+$

$$S_n + \cancel{S_{n-1}} + \dots + \cancel{S_2} + \cancel{S_1} = \cancel{S_{n-1}} + \cancel{S_{n-2}} + \dots + \cancel{S_1} + \frac{2}{n(n+1)} + \frac{2}{(n-1)\cdot n} + \dots + \frac{2}{2\cdot 3} + \frac{2}{1\cdot 2}$$

$$\Leftrightarrow S_n = \frac{2}{n(n+1)} + \frac{2}{(n-1)\cdot n} + \dots + \frac{2}{2\cdot 3} + \frac{2}{1\cdot 2}$$

$$\Leftrightarrow S_n = 2\cdot\underbrace{\left(\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \dots + \frac{1}{(n-1)\cdot n} + \frac{1}{n(n+1)}\right)}$$ vu au cours

$$\Leftrightarrow S_n = 2\cdot\frac{n}{n+1}$$

$$\Leftrightarrow S_n = \frac{2n}{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$