Examen de mathématique – 8

(La récurrence)

Remarques : ***- les tables et formulaires sont autorisées.***
- la calculatrice n'est pas autorisée.

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, démontrer que le nombre $(3^{2n} - 1)$ est multiple de 8.

2) Démontrer la conjecture suivante :
soit $q \in \mathbb{R}-\{0\,;1\}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $1 + q^1 + q^2 + \cdots + q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q}$

3) Démontrer la conjecture suivante :
$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{2^1} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \frac{4}{2^4} + \cdots + \frac{n}{2^n} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$

4) a) Le nombre $(10^n + 1)$ est-il divisible par 9 pour certains $n \in \mathbb{N}$?
b) Démontrer pourtant que : si $(10^k + 1)$ est divisible par 9, alors $(10^{k+1} + 1)$ aussi.

5) a) Soit le nombre $s_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \frac{1}{1+2+3+4} + \cdots + \frac{1}{1+2+3+4+\cdots+n}$.
Calculer ce nombre pour les valeurs de n suivantes : $n \in \{1,2,3,4,5\}$.

b) ***Bonus : proposer une formule « directe » pour calculer s_n en fonction du nombre n.***