Examen de mathématique – 8

(La récurrence)

Remarques : - les tables et formulaires sont autorisées.
- la calculatrice n'est pas autorisée.

- 1) Soit $n \in \mathbb{N}$, démontrer que le nombre $(3^{3n+2} + 2^{n+4})$ est multiple de 25.
- 2) Démontrer que $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(2n-1) \cdot (2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
- 3) Vérifier la conjecture suivante pour $n \in \{1, 2, 3\}$:
la somme des cubes des n premiers nombres impairs :
$$\sum_{i=1}^n (2i-1)^3 = 1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots + (2n-1)^3 = 2n^4 - n^2$$

Puis démontrer que cette conjecture est vraie, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
(indication : la divisibilité par $(x-a)$ avec le schéma de Horner peuvent être utiles)
- 4) Soit le nombre $s_n = 1 + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2^{i-1}}$.
Calculer ce nombre s_n pour les valeurs de n suivantes : $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.
En déduire une formule permettant de calculer s_n en fonction de n .

1) (H) $m \in \mathbb{N}$

(T) $3^{3m+2} + 2^{m+4}$ est multiple de 25

(D) par récurrence

1) $m=0$: $3^{3 \cdot 0 + 2} + 2^{0+4} = 3^2 + 2^4 = 9 + 16 = 25 \checkmark$

2) $m=k \Rightarrow m=k+1$:

Soit $3^{3(k+1)+2} + 2^{(k+1)+4} =$
 $3^{3k+3+2} + 2^{k+1+4} = 3^{3k+2} \cdot 3 + 2^{k+4} \cdot 2$

$= 3^{3k+2} \cdot 27 + 2^{k+4} \cdot 2 = 3^{3k+2} (25+2) + 2^{k+4} \cdot 2$

$= \underbrace{3^{3k+2}}_{\text{mult. de 25}} \cdot 25 + 2 \underbrace{\left(3^{3k+2} + 2^{k+4} \right)}_{\text{mult. de 25 par (Hr)}} \text{ est mult. de 25}$

mult. de 25
 mult. de 25 par (Hr) cqfd

2) (H) $m \in \mathbb{N}^*$

(T) $\sum_{i=1}^m \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(2m-1)(2m+1)} = \frac{m}{2m+1}$

(D) par récurrence:

1) $m=1$: $\frac{1}{1 \cdot 3} = \frac{1}{3} = \frac{1}{2 \cdot 1 + 1} = \frac{1}{3} \checkmark$

2) $m=k \Rightarrow m=k+1$:

Soit $\sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} = \underbrace{\sum_{i=1}^k \frac{1}{(2i-1)(2i+1)}}_{\text{(Hr)}} + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$

$= \frac{k}{2k+1} + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$

$= \frac{k(2k+3) + 1}{(2k+1)(2k+3)}$

$= \frac{2k^2 + 3k + 1}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{(k+1)(2k+1)}{(2k+1)(2k+3)}$

$= \frac{k+1}{2(k+1)+1}$ cqfd

3) soit $\sum_{i=1}^n (2i-1)^3 = 1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots + (2n-1)^3 = f(n)$

alors $f(1) = 1^3 = 1 = 2 \cdot 1^4 - 1^2 = 2 - 1 = 1$

$f(2) = 1^3 + 3^3 = 28 = 2 \cdot 2^4 - 2^2 = 32 - 4 = 28$

$f(3) = 1^3 + 3^3 + 5^3 = 28 + 125 = 153 = 2 \cdot 3^4 - 3^2 = 162 - 9 = 153$

(H) $n \in \mathbb{N}^*$

(T) $f(n) = 2n^4 - n^2$

(D) par récurrence :

1) $n=1$: $f(1) = 1^3 = 2 \cdot 1^4 - 1^2 = 2 - 1 = 1 \checkmark$

2) $n=k \Rightarrow n=k+1$:

soit $f(k+1) = \sum_{i=1}^{k+1} (2i-1)^3 = \underbrace{\sum_{i=1}^k (2i-1)^3}_{(Hr)} + (2(k+1)-1)^3$

$= 2k^4 - k^2 + (2k+1)^3$

$= 2k^4 - k^2 + 8k^3 + 12k^2 + 6k + 1$

$= 2k^4 + 8k^3 + 11k^2 + 6k + 1$

$= (k+1)(k+1)(2k^2 + 4k + 1)$

$= (k+1)^2 [2(k+1)^4 - (k+1)^2]$

car: $2(k+1)^4 - (k+1)^2$

$= (k+1)^2 (2(k+1)^2 - 1)$

$= (k+1)^2 (2k^2 + 4k + 2 - 1)$

$= (k+1)^2 (2k^2 + 4k + 1)$

q.e.d.

avec lino

	2	8	11	6	1
		-2	-6	-5	-1
-1	2	6	5	1	0
		-2	-4	-1	
-1	2	4	1	0	

4) a) Soit
$$\Delta_m = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^{m-1}}$$

$$= \sum_{i=1}^m \frac{1}{2^{i-1}}$$

Si $m=1$: $\Delta_1 = 1$

$m=2$: $\Delta_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

$m=3$: $\Delta_3 = \Delta_2 + \frac{1}{4} = \frac{3}{2} + \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$

$m=4$: $\Delta_4 = \Delta_3 + \frac{1}{2^3} = \frac{7}{4} + \frac{1}{8} = \frac{15}{8}$

$m=5$: $\Delta_5 = \Delta_4 + \frac{1}{2^4} = \frac{15}{8} + \frac{1}{16} = \frac{31}{16}$

$m=6$: $\Delta_6 = \Delta_5 + \frac{1}{2^5} = \frac{31}{16} + \frac{1}{32} = \frac{63}{32}$

⋮

$m=k$: $\Delta_k = \frac{2 \cdot 2^{k-1} - 1}{2^{k-1}} = \frac{2^k - 1}{2^{k-1}}$

e) (H) $m \in \mathbb{N}^*$

(T)
$$\sum_{i=1}^m \frac{1}{2^{i-1}} = \frac{2^m - 1}{2^{m-1}}$$

(D) par récurrence :

1) initialisation : $m=1$: $\sum_{i=1}^1 \frac{1}{2^{i-1}} = \frac{1}{2^0} = 1 = \frac{2^1 - 1}{2^0} = 1 \checkmark$

2) hérédité : $m=k \Rightarrow m=k+1$:

Soit
$$\sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{2^{i-1}} = \sum_{i=1}^k \frac{1}{2^{i-1}} + \frac{1}{2^k} = \frac{2^k - 1}{2^{k-1}} + \frac{1}{2^k}$$

$$= \frac{2(2^k - 1)}{2 \cdot 2^{k-1}} + \frac{1}{2^k} = \frac{2^{k+1} - 2 + 1}{2^k} = \frac{2^{k+1} - 1}{2^k} \quad \text{cqfd}$$