Examen de mathématique – 9 - bis

(Etude de fonctions)

1) Etudier le domaine et la parité de la fonction f si

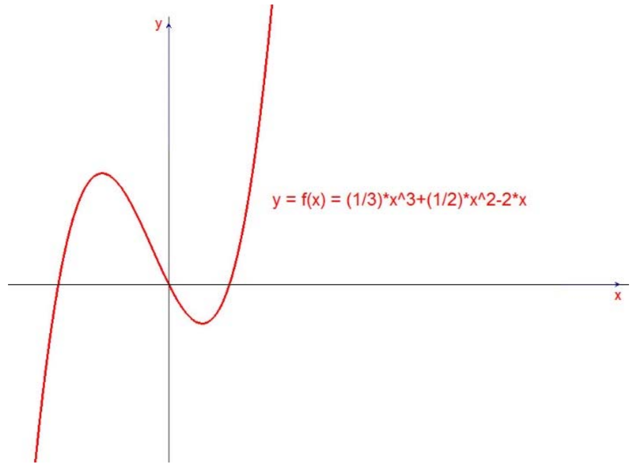
a) $y = f(x) = \dfrac{3x^2-5x-2}{\sqrt{3x^2-5x+3}}$ b) $y = f(x) = \sqrt{\dfrac{1}{1-x^2}}$

c) $y = f(x) = \dfrac{1}{2x^2-5x-7}$.

2) Etudier le domaine et la parité de la fonction f si $y = f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$;
calculer le taux de variation t de f et en déduire les intervalles de variation de f. Construire une esquisse du graphe de f.

3) Etudier le domaine et la parité de la fonction f si $y = f(x) = x^4 - 4x^3$;
calculer le taux de variation t de f puis le taux amélioré t_a de f ;
en déduire les intervalles de variation de la fonction f.

4) Calculer le taux de variation de la fonction f si $y = f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x$;
puis calculer le taux amélioré et en déduire les intervalles de croissance de la fonction f.
Puis calculer les coordonnées du point maximum et du point minimum.



1) a) $y = f(x) = \dfrac{3x^2 - 5x - 2}{\sqrt{3x^2 - 5x + 3}}$

* Domaine : $3x^2 - 5x + 3 > 0 \iff \Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 3 = 25 - 36 = -11 < 0$
et $x \in \mathbb{R}$

donc $D_f = \mathbb{R}$

* Parité : aucune car $f(1) = \dfrac{3-5-2}{\sqrt{3-5+3}} = \dfrac{-4}{\sqrt{1}} = -4$

ici D_f sym.

et $f(-1) = \dfrac{3+5-2}{\sqrt{3+5+3}} = \dfrac{6}{\sqrt{11}}$

donc $f(-1) \neq f(1) \Rightarrow f$ pas paire

$f(-1) \neq -f(1) \Rightarrow f$ pas impaire

b) $y = f(x) = \sqrt{\dfrac{1}{1-x^2}}$ soit $1 - x^2 > 0 \iff x \in]-1;1[$

donc $D_f =]-1;1[$

domaine symétrique et $f(-x) = \sqrt{\dfrac{1}{1-(-x)^2}} = \sqrt{\dfrac{1}{1-x^2}} = f(x), \forall x \in D_f$

donc f est paire

c) $y = f(x) = \dfrac{1}{2x^2 - 5x - 7}$ soit $2x^2 - 5x - 7 \neq 0$

$\iff 2x^2 - 7x + 2x - 7 \neq 0$

donc $D_f = \mathbb{R} - \{\frac{7}{2}; -1\}$ $\iff (2x-7)(x+1) \neq 0$

$\iff x \notin \{\frac{7}{2}; -1\}$

D_f non symétrique

car $(-1) \notin D_f$ et $1 \in D_f$ donc aucune parité pour f

2) $y = f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$. On a $D_f = \mathbb{R}_+^*$ car $x > 0$

D_f non sym car $1 \in D_f$ et $(-1) \notin D_f$

donc aucune parité pour f

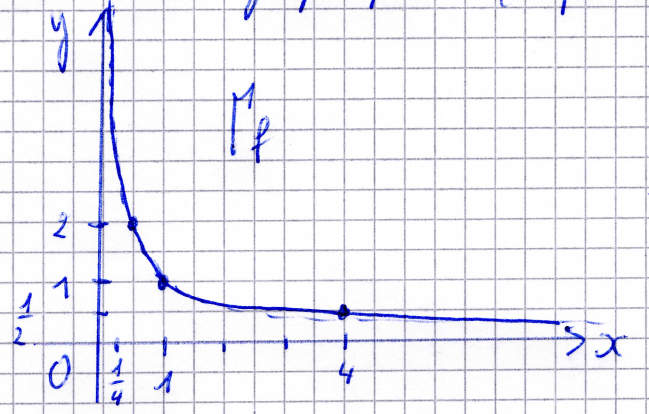
* taux : $t = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$

$= \dfrac{\frac{1}{\sqrt{x_2}} - \frac{1}{\sqrt{x_1}}}{x_2 - x_1} = \dfrac{\frac{\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}}{\sqrt{x_2} \cdot \sqrt{x_1}}}{x_2 - x_1} = \dfrac{\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}}{(x_2 - x_1) \cdot \sqrt{x_2}\sqrt{x_1}} \cdot \dfrac{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}}$

$= \dfrac{\cancel{x_1 - x_2}\,(-1)}{\cancel{(x_2 - x_1)}\sqrt{x_2} \cdot \sqrt{x_1}\,(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2})} = \dfrac{-1}{\underbrace{\sqrt{x_1 x_2}}_{>0}\,\underbrace{(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2})}_{>0}} < 0$

donc $t<0$ $\forall \{x_1, x_2\} \subset \mathbb{R}_+^*$ et f strict. décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$

* Représentation graphique : (esquisse)



3) $y = f(x) = x^4 - 4x^3$ et $D_f = \mathbb{R}$ (sym.)

et $f(-x) = (-x)^4 - 4(-x)^3 = x^4 + 4x^3 = f(x), \forall x$?

$= -f(x), \forall x$? (plutôt non)

Soit $f(1) = 1^4 - 4.1^3 = -3$

$f(-1) = (-1)^4 - 4(-1)^3 = 1 + 4 = 5$

ainsi $f(-1) \neq f(1)$ et f pas paire

et $f(-1) \neq -f(1)$ et f pas impaire

* taux : $t = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \dfrac{(x_2^4 - 4x_2^3) - (x_1^4 - 4x_1^3)}{x_2 - x_1}$

$= \dfrac{(x_2^4 - x_1^4) - 4(x_2^3 - x_1^3)}{x_2 - x_1} = \dfrac{\cancel{(x_2 - x_1)}\left[(x_2 + x_1)(x_2^2 + x_1^2) - 4(x_2^2 + x_1 x_2 + x_2^2)\right]}{\cancel{x_2 - x_1}}$

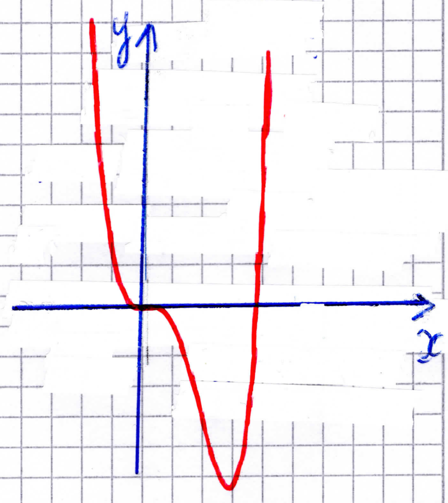
$= x_2^3 + x_2^2 x_1 + x_2 x_1^2 + x_1^3 - 4x_2^2 - 4x_1 x_2 - 4x_2^2$

et $t_a = x_1^3 + x_1^3 + x_1^3 + x_1^3 - 4x_1^2 - 4x_1^2 - 4x_1^2$ (en posant $x_2 = x_1$)

$= 4x_1^3 - 12x_1^2 = \underbrace{4x_1^2}_{\geq 0}(x_1 - 3)$

tableau des signes de t_a :

x_1	$-\infty$		0		3
t_a		−	0	−	0	+
variations de f		↘		↘		↗



4) Soit $y = f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x$ et $D_f = \mathbb{R}$

Soit le taux : $t = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \dfrac{\left(\frac{1}{3}x_2^3 + \frac{1}{2}x_2^2 - 2x_2\right) - \left(\frac{1}{3}x_1^3 + \frac{1}{2}x_1^2 - 2x_1\right)}{x_2 - x_1}$

$$= \frac{\frac{1}{3}(x_2^3 - x_1^3) + \frac{1}{2}(x_2^2 - x_1^2) - 2(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$= \frac{\cancel{(x_2 - x_1)}\left[\frac{1}{3}(x_2^2 + x_2x_1 + x_1^2) + \frac{1}{2}(x_2 + x_1) - 2\right]}{\cancel{x_2 - x_1}}$$

Si $x_2 = x_1$, on a : $t_a = \frac{1}{3}(x_1^2 + x_1^2 + x_1^2) + \frac{1}{2}(x_1 + x_1) - 2$

$$= \frac{1}{3} \cdot 3x_1^2 + \frac{1}{2} \cdot 2x_1 - 2$$

$$= x_1^2 + x_1 - 2$$

$$= (x_1 + 2)(x_1 - 1)$$

		-2		1		$\mathbb{R}$
signe de t_a :	$+$	0	$-$	0	$+$	
variation de f :	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

On a un maximum en $x = -2$ et $f(-2) = \frac{1}{3}(-8) + \frac{1}{2}(-2)^2 - 2(-2)$

$$= \frac{-8}{3} + 2 + 4$$

$$= \frac{10}{3}$$

On a un minimum en $x = 1$ et $f(1) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2 = \frac{2 + 3 - 12}{6} = \frac{-7}{6}$