Examen de mathématique – 9

(Etude de fonctions)

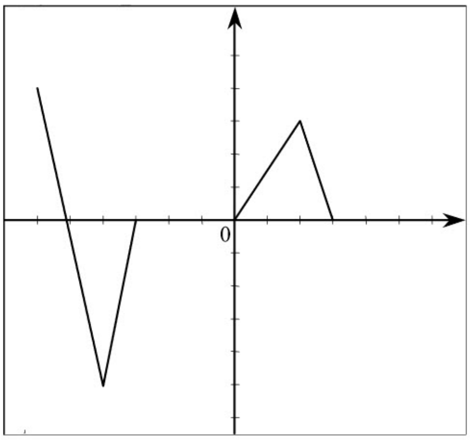
1) Calculer le domaine de définition de la fonction f si :

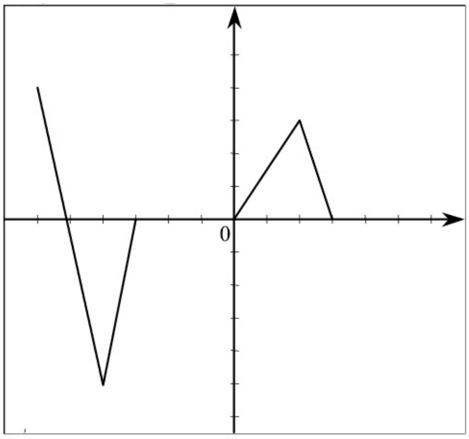
a) $f(x) = \dfrac{x+7}{2x^3-7x^2+5x}$ b) $f(x) = \sqrt{7x^2-4x-11}$

c) $f(x) = \dfrac{\sqrt{5x-7}}{3x^2-5x+8}$

2) Une fonction f est définie sur l'intervalle [-6 ;6]. Une partie de son graphique est donnée ci-dessous : **la reproduire sur la feuille d'examen** puis compléter le graphique de f si

a) f est paire b) f est impaire





3) Soit les fonctions f, g, h et j définies par :

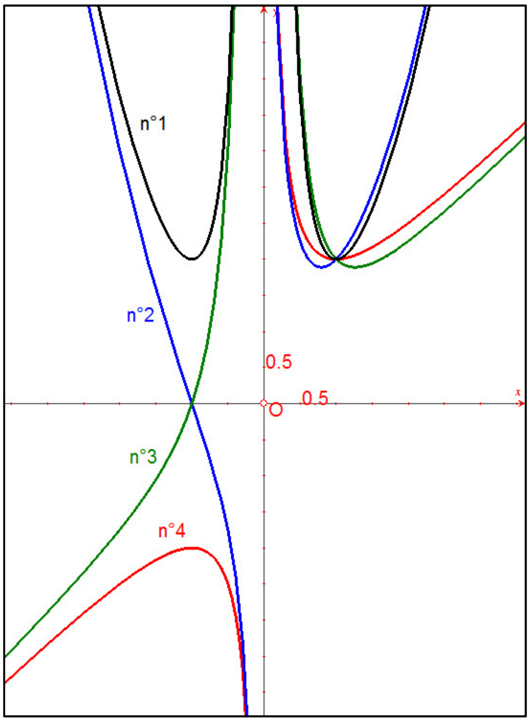
$f(x) = x + \frac{1}{x}$,

$g(x) = x^2 + \frac{1}{x}$,

$h(x) = x + \frac{1}{x^2}$

$j(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$

Attribuer à chaque fonction son graphe en expliquant pourquoi.



4) Etudier le domaine et la parité de la fonction f si $f(x) = \dfrac{-1}{x^2}$;
calculer le taux de variation t de f et en déduire les intervalles de variation de f. Présenter une esquisse du graphe de f.

5) Etudier le domaine et la parité de la fonction f si $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$;
calculer le taux de variation t de f puis le taux amélioré t_a de f ; en déduire les intervalles de variation de la fonction f.

Corrigés

Exercice 1 Etudier le domaine de f si :

1) $f(x) = \dfrac{x+7}{2x^3-7x^2+5x}$

C.E. $2x^3-7x^2+5x \neq 0$

ainsi $D_f = \mathbb{R} - \{0 ; 1 ; \frac{5}{2}\}$

Coin brouillon :

$$2x^3-7x^2+5x = 0$$
$$\Leftrightarrow x(2x^2-7x+5) = 0$$
$$\Leftrightarrow x(2x^2-2x-5x+5) = 0$$
$$\Leftrightarrow x[2x(x-1)-5(x-1)] = 0$$
$$\Leftrightarrow x(x-1)(2x-5) = 0$$
$$\Leftrightarrow x \in \{0 ; 1 ; \tfrac{5}{2}\}$$

2) $f(x) = \sqrt{7x^2-4x-11}$

C.E. : $7x^2-4x-11 \geq 0$

$\Leftrightarrow x \in]-\infty, -1] \cup [\frac{11}{7}, +\infty[$

d'où $D_f =]-\infty, -1] \cup [\frac{11}{7}, +\infty[$

$$7x^2-4x-11 = 0$$
$$\Leftrightarrow 7x^2+7x-11x-11 = 0$$
$$\Leftrightarrow 7x(x+1)-11(x+1) = 0$$
$$\Leftrightarrow (x+1)(7x-11) = 0$$
$$\Leftrightarrow x \in \{-1 ; \tfrac{11}{7}\}$$

x		-1		$\frac{11}{7}$		$\to \mathbb{R}$
	$+$	0	$-$	0	$+$	

3) $f(x) = \dfrac{\sqrt{5x-7}}{3x^2-5x+8}$

C.E. : $\begin{cases} 5x-7 \geq 0 \\ 3x^2-5x+8 \neq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{7}{5} \\ x \in \mathbb{R} \end{cases}$

ainsi $D_f = [\frac{7}{5}, +\infty[$

$$3x^2-5x+8 = 0$$
$$\Leftrightarrow (\quad)(\quad) = 0 \,?$$

$\begin{cases} m+n = -5 \\ m \cdot n = 3 \cdot 8 \\ \quad = 24 \end{cases}$

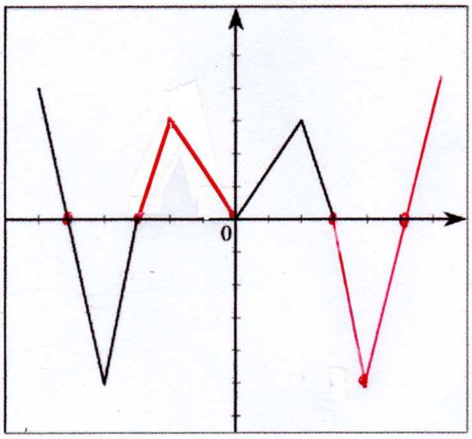
$\Leftrightarrow \begin{cases} ?? \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 8$$
$$= 25 - 96$$
$$= -71 < 0$$

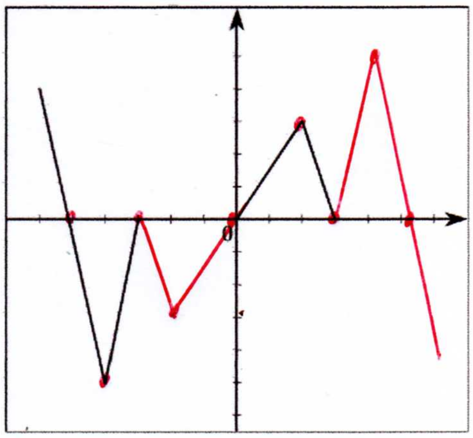
et $x \in \emptyset$

Exercice 2 : Une fonction f est définie sur l'intervalle [-6 ;6]. Une partie de son graphique est donnée ci-dessous : la reproduire sur la feuille d'examen puis compléter le graphique de f si

a) f est paire

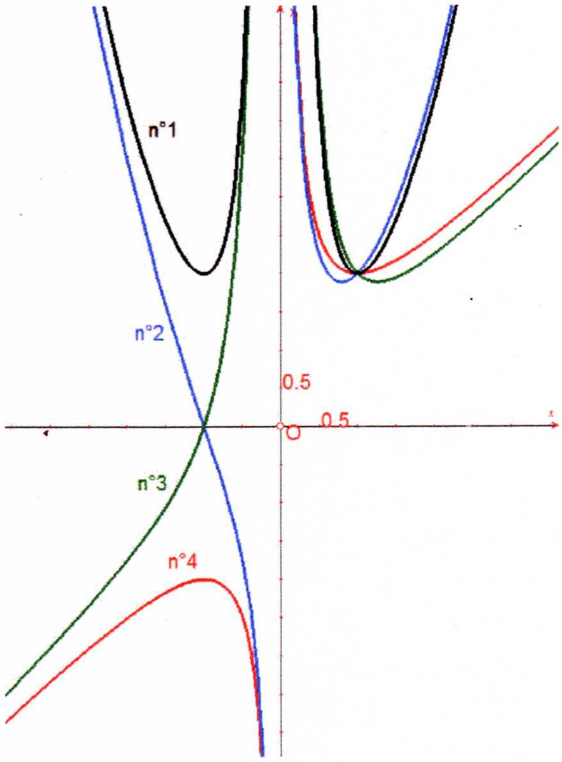


b) f est impaire



Exercice 3 :

Soit les fonctions f, g, h et j définies par :



f(x) = $x + \frac{1}{x}$, n° 4 f est impaire

g(x) = $x^2 + \frac{1}{x}$, n° 2

h(x) = $x + \frac{1}{x^2}$ n° 3

j(x) = $x^2 + \frac{1}{x^2}$ n° 1 j est paire

Attribuer à chaque fonction son graphe :

(2) $f(x) = \frac{-1}{x^2}$ et $D_f = \mathbb{R}^*$ car $x^2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$

* D_f est symétrique et $f(-x) = \frac{-1}{(-x)^2} = \frac{-1}{x^2} = f(x)$, $\forall x \in D_f$

donc f est paire.

* Calcul du taux : $t = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{\frac{-1}{x_2^2} - \frac{-1}{x_1^2}}{x_2 - x_1}$

$= \frac{-x_1^2 + x_2^2}{(x_2 - x_1)\, x_2^2 \cdot x_1^2} = \frac{\cancel{(x_2 - x_1)}(x_2 + x_1)}{\cancel{(x_2 - x_1)}\, x_2^2 \cdot x_1^2} = \frac{x_2 + x_1}{x_2^2 \cdot x_1^2}$

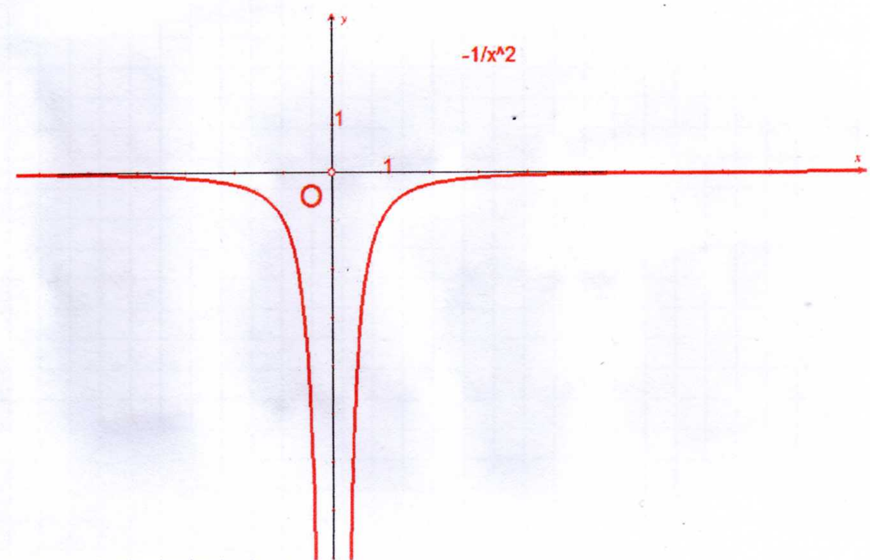
* Si $\{x_1, x_2\} \subset]-\infty, 0[$, $x_2 + x_1 < 0$ et $t = \frac{x_2 + x_1}{x_2^2 \cdot x_1^2} < 0$

donc f est décroissante sur $]-\infty, 0[$

* Si $\{x_1, x_2\} \subset]0, +\infty[$, $x_2 + x_1 > 0$ et $t > 0$, donc

f est croissante sur $]0, +\infty[$

* Représentation graphique :



4) Soit $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$ et $D_f = \mathbb{R}^*$ car $x \neq 0$

D_f est symétrique et $f(-x) = \frac{(-x)^2+1}{(-x)} = \frac{x^2+1}{-x}$

$$= -\frac{x^2+1}{x} = -f(x), \ \forall x \in D_f$$

donc f est impaire

* Soit $t = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = \frac{\frac{x_2^2+1}{x_2} - \frac{x_1^2+1}{x_1}}{x_2-x_1} = \frac{x_1(x_2^2+1)-x_2(x_1^2+1)}{(x_2-x_1)\cdot x_2x_1}$

$$= \frac{x_1x_2^2+x_1-x_2x_1^2-x_2}{(x_2-x_1)\cdot x_2x_1} = \frac{(x_1x_2^2-x_2x_1^2)+(x_1-x_2)}{(x_2-x_1)\cdot x_2x_1}$$

$$= \frac{x_1x_2(x_2-x_1)-(x_2-x_1)}{(x_2-x_1)\,x_2x_1} = \frac{\cancel{(x_2-x_1)}(x_1x_2-1)}{\cancel{(x_2-x_1)}\,x_2x_1}$$

$$= \frac{x_1x_2-1}{x_2x_1} \ ;$$

* D'où, si $x_2=x_1$: $t_a = \frac{x_1^2-1}{x_1^2 \ (>0)}$ donc t_a est du signe du numérateur (x_1^2-1) :

t_a	+	0	−	||	−	0	+	
x_1		−1		0		+1		$\to \mathbb{R}$

* Donc f est croissante sur $]-\infty, -1[$ et sur $]+1, +\infty[$

et décroissante sur $]-1, 0[$ et sur $]0, +1[$

* Représentation graphique :