CHAPITRE 2

LA DROITE

PARALLELISME, ORDRE

ORTHOGONALITE, PROJECTION

1 Parallélisme, relation d'équivalence

En géométrie, on utilise des axiomes (des propositions que l'on admet) qui correspondent au mode d'emploi des outils (règle, équerre, compas, rapporteur).

1.1 Le parallélisme

AXIOME DU PLAN (Pour l'usage du papier ou du tableau noir, et du crayon)

On dispose d'un ensemble $\mathbb{P}$ appelé plan, dont les éléments se nomment points, et dont certains sous-ensembles d, appelés droites, sont distincts de $\mathbb{P}$ et comprennent au moins deux points.

AXIOME DE LA DROITE (Pour l'usage de la règle "non cintrée")

Toute paire de points distincts est incluse dans une et une seule droite.

Notation: Si $A \neq B$ et $\{A, B\} \subset d$ alors la droite d s'écrit aussi (AB).

Si dans le plan **P** deux droites sont soit sécantes soit parallèles, dans l'espace **E**, deux droites peuvent être "gauches", c'est-à-dire ni sécantes ni parallèles.

Définition 1 Deux droites du plan sont dites **sécantes** si elles ont exactement un point commun.

Définition 2 Deux droites du plan sont dites **parallèles** si elles sont disjointes ou confondues.

Notation : $a \parallel b \Leftrightarrow (a \cap b = \varnothing \text{ ou } a = b)$

Deux droites parallèles différentes sont dites **strictement parallèles** .

AXIOME DES PARALLELES (Euclide) (Pour les deux bords "bien parallèles" d'une règle large)

Par un point passe une et une seule droite parallèle à une droite d.

THEOREME 1

1. Si deux droites sont parallèles, toute sécante à l'une est sécante à l'autre.
2. Si deux droites sont parallèles à une même droite, elles sont parallèles entre elles.

Exercices

1 *Vérifier que l'on a* $d_1 \parallel d_1$. *On dit alors que la relation de parallélisme est* ***réflexive.***

2 *Vérifier que* $d_1 \parallel d_2 \Rightarrow d_2 \parallel d_1$. *On dit alors que la relation de parallélisme est* ***symétrique.***

3 *Vérifier à l'aide du théorème 1.2 que* $d_1 \parallel d_2$ *et* $d_2 \parallel d_3 \Rightarrow d_1 \parallel d_3$. *On dit alors que la relation de parallélisme est* ***transitive.***

Le parallélisme permet de comparer deux droites qui sont deux éléments de $\mathbb{D}$ l'ensemble des droites. On peut classer les droites selon la relation de parallélisme. Pour trouver une classe, on choisit une droite et l'on cherche celles qui lui sont parallèles. Ainsi, deux droites du plan sont dans une même classe si et seulement si elles sont parallèles, une classe s'appelant une **direction** du plan.

Exercices

4 *Deux droites sécantes sont-elles parallèles? Est-ce que* $\mathbb{D}$ *est une direction du plan, et* $\mathbb{P}$, *et* $\emptyset$, *et* d ?

5 *Si l'on note* $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, ..., \Delta_n, ...$ *les directions du plan, vérifier qu'aucune classe n'est vide, que deux classes distinctes sont disjointes, que la réunion des classes est* $\mathbb{D}$, *c'est-à-dire que l'ensemble des directions est une partition de* $\mathbb{D}$.

6 *A-t-on* $\Delta_1 \in \mathbb{D}$, $\Delta_2 \subset \mathbb{D}$, $\Delta_n \in \mathcal{P}(\mathbb{D})$?

7 *Si* $A \notin (BC)$ *et* $(AD) \parallel (BC)$ *et* $(AE) \parallel (CB)$ *alors* $D \in (AE)$.

8 ***Théorème.*** *Si deux droites sont respectivement parallèles à deux droites sécantes, elles sont sécantes.*

9 *La réciproque de* $(d_1 \parallel d_2 \text{ et } d_1 \cap d_3 = \{A\}) \Rightarrow (d_2 \cap d_3 = \{B\})$ *est-elle vraie?*

10 *On donne trois points non alignés* A,B,C *et* d_1 *parallèle à* (BC) *par* A, d_2 *parallèle à* (AB) *par* C *et* d_3 *parallèle à* (AC) *par* B. *Démontrer que* d_1 *et* d_2 *sont sécantes. Que peut-on dire des droites* d_1 *et* d_3, *ainsi que des droites* d_2 *et* d_3 ?

1.2 Relation d'équivalence

Pour avoir une relation et étudier ses propriétés, il faut trois choses dans l'ordre, un **ensemble de départ**, un **ensemble d'arrivée** et le moyen de passer d'un ensemble à l'autre. Par exemple, pour la relation de parallélisme, si $d_1 \parallel d_2$, on dit que $d_1 \in \mathbb{D}$ est associée à $d_2 \in \mathbb{D}$ par cette relation. On dit aussi que d_1 est en relation (de parallélisme) avec d_2 ce qu'on écrit $d_1 \mathcal{R} d_2$. d_1 et d_2 sont les deux membres d'un couple (d_1, d_2) du produit cartésien $\mathbb{D}x\mathbb{D}$. Le premier ensemble $\mathbb{D}$ de ce produit est l'ensemble de départ de la relation et le deuxième ensemble $\mathbb{D}$ celui de l'arrivée. La relation de parallélisme est alors caractérisée par l'ensemble de départ $\mathbb{D}$, l'ensemble d'arrivée $\mathbb{D}$ et la partie $G \subset \mathbb{D}x\mathbb{D}$ formée de tous les couples (d_1, d_2) de droites respectivement parallèles.

Définition 3 Une **relation** $\mathcal{R}$ dans un ensemble E est un triplet $\mathcal{R} = (E, E, G)$ avec $G \subset ExE$.
La partie G du produit cartésien ExE s'appelle le **graphe** de la relation $\mathcal{R}$ et est l'ensemble des couples de ExE dont les membres sont associés par la relation $\mathcal{R}$.

Définition 4 Une relation $\mathcal{R}$ dans un ensemble E est dite

réflexive	si et seulement si	$\forall x \in E$	$x \mathcal{R} x$
symétrique	si et seulement si	$\forall \{x, y\} \subset E$	$x \mathcal{R} y \Rightarrow y \mathcal{R} x$
antisymétrique	si et seulement si	$\forall \{x, y\} \subset E$	$(x \mathcal{R} y \text{ et } y \mathcal{R} x) \Rightarrow x = y$
transitive	si et seulement si	$\forall \{x, y, z\} \subset E$	$(x \mathcal{R} y \text{ et } y \mathcal{R} z) \Rightarrow x \mathcal{R} z$

Définition 5 Si une relation $\mathcal{R}$ dans E est réflexive, symétrique et transitive, on dit qu'elle est une**relation d'équivalence.**
L'ensemble des éléments de E en relation d'équivalence avec un élément x s'appelle la **classe** (d'équivalence) de x.

Remarque

On démontrera en 2ème année qu'à toute relation d'équivalence $\mathcal{R}$ définie dans un ensemble E, est associée une partition de E en classes d'équivalence.

2 Relation d'ordre sur une droite

Pour préciser le choix des points pour la construction d'une droite, on admet l'axiome d'ordre total suivant.

AXIOME D'ORDRE TOTAL SUR LA DROITE

Pour chaque droite d , on admet une relation notée " $\preceq$ " , se lisant "précède", telle que $\preceq = (d, d, G)$ et $G \subset d \times d$ avec

1) $\forall\ A \in d$ $\quad A \preceq A$ **(réflexivité)**

$\forall\ \{A, B\} \subset d$ $\quad (A \preceq B \text{ et } B \preceq A) \Rightarrow A = B$ **(antisymétrie)**

$\forall\ \{A, B, C\} \subset d$ $\quad (A \preceq B \text{ et } B \preceq C) \Rightarrow A \preceq C$ **(transitivité)**

$\forall\ \{A, B\} \subset d$ $\quad (A \preceq B \text{ ou } B \preceq A)$ **(les éléments sont comparables deux à deux)**

2) **de plus si $(AB) = d$, il existe trois autres points X, Y, Z sur d tels que $X \preceq A \preceq Y \preceq B \preceq Z$.**

Remarque

Une relation qui possède les quatre propriétés du point n° 1 s'appelle **relation d'ordre total.**

Exercices

11 *Démontrer que* $\preceq$ *n'est pas une relation d'équivalence.*

12 *Démontrer que* $\|$ *n'est pas une relation d'ordre total et que* $\forall\ \{a,b\} \in \mathbf{D}$ *on n'a pas* $a \| b$ *ou* $b \| a$.

La relation d'ordre total $\preceq$ permet de définir les demi-droites et les segments qui sont des sous-ensembles d'une droite donnée.

Définition 6 Si A, B, C sont trois points distincts d'une même droite d tels que $A \preceq B \preceq C$, l'ensemble $\{ M \in d \mid B \preceq M \} = [B,C)$ s'appelle **demi-droite d'origine** B passant par C; l'ensemble $\{ M \in d \mid M \preceq B \} = [B,A)$ s'appelle **demi-droite d'origine** B passant par A; $[B,A)$ et $[B,C)$ sont dites demi-droites **opposées.**

Définition 7 Deux demi-droites sont de **même sens** si et seulement si l'une est incluse dans l'autre. Deux demi-droites d'une droite donnée sont de **sens contraires** si et seulement si aucune n'est incluse dans l'autre.

Définition 8 Un **segment** est l'intersection de deux demi-droites de sens contraires. Si l'intersection n'est pas vide, les origines de ces demi-droites se nomment les **extrémités** du segment.

Notation

$[A,X) \cap [B,Y) = [A,B] = [B,A] = [B,Y) \cap [A,X)$ de même $[A,B) \cap [B,A) = [A,B]$

Exercices

13 *Montrer que l'intersection de deux demi-droites opposées est un singleton. Envisager une réciproque et donner sa valeur logique.*

14 *Donner la définition d'une* ***<u>demi-droite ouverte</u>*** *(sans l'origine, notée*]A,B)), *d'un* ***<u>segment ouvert</u>*** *(noté*]A,B[ ).

15 *Les ensembles* {A} *et* **Ø** *sont-ils des segments? Qu'est-ce que*]A,A],]A,A[? *A-t-on*]A,B] = [B,A[?

16 *Démontrer que tout point d'une droite permet de construire une partition de celle-ci en trois sous-ensembles convenablement choisis.*

17 *Deux demi-droites de sens contraires sont-elles opposées?*

3 Relation d'orthogonalité

AXIOME D'ORTHOGONALITE (Pour l'usage de l'équerre)

Dans l'ensemble $\mathbb{D}$ des droites du plan, il existe une relation notée $\perp$, appelée orthogonalité, telle que:

1 par tout point A du plan passe une et une seule sécante d_1 à une droite d telle que $d_1 \perp d$;

2 l'orthogonalité est une relation symétrique.

On dit "d_1 orthogonale à d ".

THEOREME 3 Si deux droites sont orthogonales à une même droite, elles sont parallèles.

THEOREME 4 Si deux droites sont parallèles, toute orthogonale à l'une est orthogonale à l'autre.

Exercices

18 *Démontrer:*

a) l'orthogonalité n'est pas réflexive, pas antisymétrique, pas transitive,

b) a-t-on $\| = \perp$*? Deux droites parallèles ne sont pas orthogonales,*

c) la réciproque de l'implication précédente est fausse.

19 *Démontrer que, si deux droites sont parallèles, toute orthogonale à l'une est parallèle à toute orthogonale à l'autre.*

20 *Démontrer que deux droites orthogonales à deux droites sécantes sont sécantes.*

21 *La proposition suivante est-elle vraie?*

Si deux droites sont orthogonales, toute orthogonale à l'une est orthogonale à toute orthogonale à l'autre.

Qu'en est-il si l'on remplace le mot orthogonale par sécante, respectivement parallèle?

22 *Démontrer que l'ensemble des droites orthogonales à une droite donnée est une direction du plan.*

23 *Démontrer qu'il n'existe pas trois droites orthogonales deux à deux.*

4 La projection

Pour projeter parallèlement à une droite d un point M du plan $\mathbf{P}$ sur une droite d_1 **sécante** à d, il faut associer à tout point de l'ensemble de départ $\mathbf{P}$ un et un seul élément de l'ensemble d'arrivée d_1. Pour cela, par $M \in \mathbf{P}$ on construit d_2, la seule parallèle à d. Comme d est sécante à d_1, alors d_2 est sécante à d_1 en M'. Ainsi, on fait correspondre à $M \in \mathbf{P}$ un et un seul point $M' \in d_1$.

Définition 9 On appelle **projection parallèle** du plan $\mathbf{P}$ sur une droite d_1, parallèlement à une droite d sécante à d_1, la relation $p_d = (\mathbf{P}, d_1, G)$ de graphe $G = \{(M,M') \in \mathbf{P}\mathrm{x}d_1 \mid M \in d_2$ et $d_2 \| d$ et $d_1 \cap d_2 = \{M'\}\}$.

M' s'appelle le **projeté** de M et M un **ancêtre** de M'.

On note $M' = p_d(M)$

Pour cette relation, tous les éléments de l'ensemble de départ $\mathbf{P}$ sont pris une et une seule fois et tout M de $\mathbf{P}$ a une et une seule image M'.

Définition 10 Une relation f d'un ensemble de départ A vers un ensemble d'arrivée B est appelée **application** si tout élément x de l'ensemble A a une et une seule image y dans B.

On écrit $\quad f : A \to B$

$\qquad\qquad x \mapsto y \quad$ et $y = f(x)$

Les deux points ": " se lisent "est une application", "$\to$ " se lit "vers" et "$\mapsto$ " se lit "a pour image".

Définition 11 Une application est appelée **bijection** ou **application bijective** si tout élément de l'ensemble d'arrivée a un et un seul ancêtre dans l'ensemble de départ.

Exercices

24 *Donner une définition pour une projection d'une droite sur une droite. Quels sont les ensembles de départ et d'arrivée? Comment choisir les droites pour avoir une bijection?*

25 *Dans une projection de* d_1 *vers* d_2 *parallèlement à* d_3, *peut-on avoir* $d_1 \parallel d_2$; $d_1 \parallel d_3$; $d_3 \perp d_2$; $d_3 \perp d_1$?

26 *Dans une projection du plan* $\mathbb{P}$ *vers* d_1 *parallèlement à* d, *quel est l'ensemble des ancêtres d'un point* A' *de* d_1 ? *Cet ensemble est appelé* ***image réciproque*** *du singleton* $\{A'\}$.

27 *On donne* A,B,C,D *quatre points non alignés trois à trois avec* $(AB) \in \Delta_1$ *et* $(AC) \in \Delta_2$. *A toute droite* d_1 *de direction* Δ_1, *on associe* d_2 *de direction* Δ_2 *telle que* $d_1 \cap (AD) = \{M\} = d_2 \cap (AD)$. *Démontrer que l'on a une application bijective de* Δ_1 *vers* Δ_2.

28 *On a une application, appelée* ***projection centrale***, *si* $O \notin d$, $d_1 \parallel d$ et $O \in d_1$ *avec*

$p_O : \mathbb{P} - d_1 \to d$

$\qquad M \mapsto M' = p_O(M)$ et $M' \in (OM) \cap d$.

Cette application est-elle une bijection?

Définition 12 La **projection orthogonale** $p_\perp$ du plan $\mathbf{P}$ sur une droite b est une projection parallèle p_d de $\mathbf{P}$ sur b telle que $d \perp b$.

Exercices

29 *La projection orthogonale de* d_1 *sur* d_2 *admet-elle des points fixes? Dans quel cas est-elle bijective? Donner une condition nécessaire et suffisante pour que le projeté orthogonale d'une droite soit un singleton.*

30 *Soit* $d_1 \neq d_2$ *et* $A \notin d_1 \cup d_2$. *Si* $p_\perp(A) = A_1 \in d_1$ *et* $p_\perp(A) = A_2 \in d_2$, *démontrer que l'on a:* A, A_1, A_2 alignés $\Leftrightarrow$ $d_1 \| d_2$.

5 Exercices complémentaires

<u>*Paragraphe 1*</u>

31 *Combien de situations différentes peut-on envisager avec parallèles et sécantes pour 2, respectivement 3 , 4 droites distinctes?*

32 *Comment placer quatre points distincts pour avoir deux droites parallèles, deux couples de droites parallèles. Comment placer cinq points distincts pour avoir deux droites parallèles, deux couples de droites parallèles; peut-on avoir trois droites parallèles? Même question avec six points.*

33 *On donne quatre droites sécantes deux à deux. Combien a-t-on au plus de points d'intersection? Combien a-t-on alors de triangles (ensemble de trois points non alignés)? Reprendre la question avec cinq droites.*

34 *Combien a-t-on de triangles si l'on donne quatre points non alignés trois à trois? Même question avec cinq points,* n *points.*

35 *On donne* $E = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ *et* $G = \{(x, y) \in E^2 \mid x^2 = y^2\}$. *Montrer que* $\mathcal{R} = (E, E, G)$ *est une relation d'équivalence et déterminer les classes d'équivalence.*

36 *On donne* $G = \{(x, y) \in \mathbf{N}^2 \mid x + y \text{ est pair}\}$. *Montrer que* $\mathcal{R} = (\mathbf{N}, \mathbf{N}, G)$ *est une relation d'équivalence et écrire les classes d'équivalence.*

37 *Si* $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{5, 6\}$ *et* $G = \{(1, 5), (3, 6), (4,6)\}$, *on peut envisager une relation sur deux ensembles différents. Cette relation est-elle symétrique?*

38 *Proposer des exemples de relations entre deux ensembles différents et donner une définition pour une relation d'un ensemble vers un autre.*

39 *Construire une relation avec* $A = \{1, 2, 3\}$.

40 *Peut-on utiliser* $\varnothing$ *pour construire une relation?*

41 *Toutes les relations ne sont pas des relations d'équivalence. Donner des exemples.*

42 *Construire une relation symétrique et antisymétrique; une relation non symétrique et antisymétrique.*

Paragraphe 2

43 *Si l'on appelle **figure** du plan tout sous-ensemble du plan, les objets suivants sont-ils des figures?* $\varnothing$, $\mathbb{P}$, $\{A, B\}$, (AB), a, $\{A\}$, $\{a\}$, $\mathbb{D}$, $\{\mathbb{D}\}$, $\{A, d\}$.

44 *Si* $[A,B) \subset \mathbf{P}$ *alors* $A \neq B$.

45 *On dit qu'une figure* $\mathcal{F}$ *est **convexe** si et seulement si* $\{A,B\} \subset \mathcal{F} \Rightarrow [A,B] \subset \mathcal{F}$. *Démontrer que la demi-droite est une figure convexe.*

46 *Démontrer que l'intersection de deux figures convexes, le segment, la droite sont des figures convexes. En est-il de même pour les figures suivantes:* $\{A\}$, $\{A,B\}$, $\{A,B,C\}$, $\varnothing$?

47 *La réunion de deux demi-droites de sens contraires est-elle une droite, une figure, une figure convexe?*

48 *Démontrer que si deux points* A *et* B *sont éléments respectivement de deux demi-droites opposées d'origine* P, *le point* P *est élément du segment* $[A,B]$.

49 *A l'aide de cinq points d'une droite, combien dénombre-t-on de demi-droites, de paires de demi-droites opposées, de paires de demi-droites de sens contraires, de couples de demi-droites de sens contraires? Même question pour* n *points.*

50 *Montrer que la relation "avoir le même sens" est une relation d'équivalence dans l'ensemble des demi-droites d'une droite donnée. Une classe d'équivalence s'appelle une **orientation** de la droite. Vérifier que la droite a exactement deux orientations.*
La relation "être de sens contraires" est-elle une relation d'équivalence?

Paragraphe 4

51 *Soit* $d_1 \cap d_2 = \{C\}$, $A \in d_2 - d_1$, $B \in d_1 - d_2$ et $(AB) \in \Delta$, $B \in d_3$, $d_3 \parallel d_2$
et $E = \{ d \in \mathbb{D} \mid B \in d \text{ et } d \neq d_3 \}$. *Démontrer que l'on a une bijection* f *telle que:*

$f: E \to \Delta$

$d \mapsto f(d) = d'$ et $d \cap d_2 = \{M\}$ et $M \in d'$.

52 *Dans l'ensemble des demi-droites d'origine* A , *on pose:* $[A,X) \mathcal{R} [A,Y) \Leftrightarrow (AX) \perp (AY)$.
Etudier les propriétés de la relations $\mathcal{R}$.

53 *Si* $A \neq B$ *et* $M \mathcal{R} M' \Leftrightarrow (AM) \perp (AM')$ *et* $(BM) \perp (BM')$, *dans quel ensemble définit-on cette relation* $\mathcal{R}$? $\mathcal{R}$ *est-elle une application? Quelles sont les popriétés de* $\mathcal{R}$?