Trigonométrie

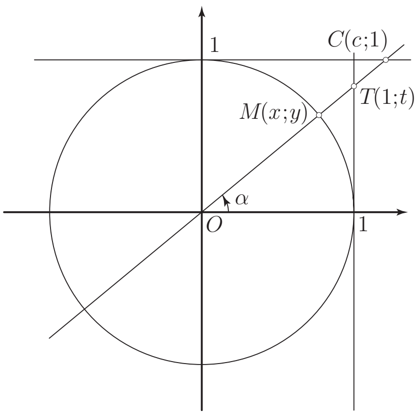
Trigonométrie plane

Conversion des mesures d'angles

On note respectivement d, r et g la mesure d'un angle en degrés, en radians et en grades.

Pour un même angle, on a $\boxed{\dfrac{d}{180} = \dfrac{r}{\pi} = \dfrac{g}{200}}$

Définition des fonctions trigonométriques



$$\begin{aligned} \cos(\alpha) &= x \\ \sin(\alpha) &= y \\ \tan(\alpha) &= t \\ \cot(\alpha) &= c \end{aligned}$$

Relations entre fonctions trigonométriques d'un même arc

$\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$	$\tan(\alpha) = \dfrac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$	$\cot(\alpha) = \dfrac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}$
$\cot(\alpha) = \dfrac{1}{\tan(\alpha)}$	$\dfrac{1}{\cos^2(\alpha)} = 1 + \tan^2(\alpha)$	$\dfrac{1}{\sin^2(\alpha)} = 1 + \cot^2(\alpha)$

Valeurs exactes des fonctions trigonométriques d'arcs particuliers

α		$\cos(\alpha)$	$\sin(\alpha)$	$\tan(\alpha)$
$0°$	0	1	0	0
$30°$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$45°$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$60°$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{3}$
$90°$	$\frac{\pi}{2}$	0	1	-

Périodicité des fonctions trigonométriques

$\cos(\alpha + 2\pi) = \cos(\alpha)$	$\sin(\alpha + 2\pi) = \sin(\alpha)$	$\tan(\alpha + \pi) = \tan(\alpha)$

Relations entre fonctions trigonométriques de certains arcs

$\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$	$\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$	$\tan(-\alpha) = -\tan(\alpha)$
$\cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha)$	$\sin(\pi - \alpha) = \sin(\alpha)$	$\tan(\pi - \alpha) = -\tan(\alpha)$
$\cos(\pi + \alpha) = -\cos(\alpha)$	$\sin(\pi + \alpha) = -\sin(\alpha)$	$\tan(\pi + \alpha) = \tan(\alpha)$
$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin(\alpha)$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos(\alpha)$	$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot(\alpha)$
$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin(\alpha)$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos(\alpha)$	$\tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\cot(\alpha)$

Fonctions trigonométriques d'une somme et d'une différence d'arcs

$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$	$\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)$
$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$	$\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\sin(\beta)$
$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan(\alpha) + \tan(\beta)}{1 - \tan(\alpha)\tan(\beta)}$	$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan(\alpha) - \tan(\beta)}{1 + \tan(\alpha)\tan(\beta)}$

Fonctions trigonométriques du double et du triple d'un arc

$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) = 1 - 2\sin^2(\alpha) = 2\cos^2(\alpha) - 1$ $\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$ $\tan(2\alpha) = \dfrac{2\tan(\alpha)}{1-\tan^2(\alpha)}$
$\cos(3\alpha) = \cos(\alpha)\big(1 - 4\sin^2(\alpha)\big) = \cos(\alpha)\big(4\cos^2(\alpha) - 3\big)$ $\sin(3\alpha) = \sin(\alpha)\big(4\cos^2(\alpha) - 1\big) = \sin(\alpha)\big(3 - 4\sin^2(\alpha)\big)$ $\tan(3\alpha) = \dfrac{\tan(\alpha)\big(3-\tan^2(\alpha)\big)}{1-3\tan^2(\alpha)}$

Fonctions trigonométriques de la moitié d'un arc

$\cos^2\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) = \dfrac{1+\cos(\alpha)}{2}$	$\sin^2\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) = \dfrac{1-\cos(\alpha)}{2}$
$\tan^2\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) = \dfrac{1-\cos(\alpha)}{1+\cos(\alpha)}$	$\tan\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) = \dfrac{1-\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} = \dfrac{\sin(\alpha)}{1+\cos(\alpha)}$

Fonctions trigonométriques exprimées à l'aide de $t = \tan\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$

$\cos(\alpha) = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$	$\sin(\alpha) = \dfrac{2t}{1+t^2}$	$\tan(\alpha) = \dfrac{2t}{1-t^2}$

Transformation d'une somme en produit

$\cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2\cos\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$ $\sin(\alpha) + \sin(\beta) = 2\sin\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$ $\tan(\alpha) + \tan(\beta) = \dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)}$	$\cos(\alpha) - \cos(\beta) = -2\sin\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$ $\sin(\alpha) - \sin(\beta) = 2\cos\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$ $\tan(\alpha) - \tan(\beta) = \dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)}$
$a\cos(\alpha) + b\sin(\alpha) = A\cos(\alpha - \varphi)$ avec $A = \sqrt{a^2+b^2}$ et φ tel que $\cos(\varphi) = \dfrac{a}{A}$ et $\sin(\varphi) = \dfrac{b}{A}$	

Transformation d'un produit en somme

$\cos(\alpha)\cos(\beta) = \dfrac{1}{2}\big(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\big)$ $\cos(\alpha)\sin(\beta) = \dfrac{1}{2}\big(\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)\big)$ $\sin(\alpha)\sin(\beta) = \dfrac{1}{2}\big(-\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\big)$

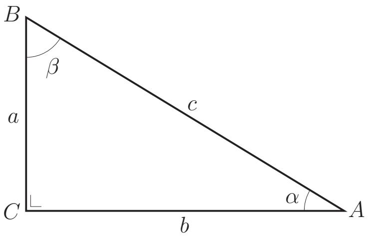
Équations trigonométriques simples

$$\cos(x) = a \iff \begin{cases} x = \arccos(a) + k \cdot 2\pi \text{ ou} \\ x = -\arccos(a) + k \cdot 2\pi \end{cases}$$

$$\sin(x) = a \iff \begin{cases} x = \arcsin(a) + k \cdot 2\pi \text{ ou} \\ x = \pi - \arcsin(a) + k \cdot 2\pi \end{cases}$$

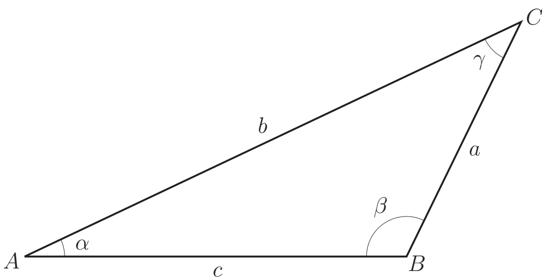
$$\tan(x) = a \iff x = \arctan(a) + k \cdot \pi$$

Triangle rectangle



$\cos(\alpha) = \frac{b}{c} = \sin(\beta)$	$\tan(\alpha) = \frac{a}{b} = \cot(\beta)$
$\sin(\alpha) = \frac{a}{c} = \cos(\beta)$	$\cot(\alpha) = \frac{b}{a} = \tan(\beta)$

Triangle quelconque



Théorème du cosinus

$$\boxed{\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha) \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos(\beta) \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma) \end{aligned}}$$

Théorème du sinus

$$\boxed{\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}}$$